Межрегиональная олимпиада по математике

Условия задач 11 класс

1. **(2 балла)** Для многочлена $\left(x^2-x+1\right)^{100}$ найдите сумму коэффициентов при четных степенях x.

2. **(2 балла)** Про числа x_1 и x_2 известно, что $x_1+x_2=2\sqrt{1703}$ и $|x_1-x_2|=90$. Найдите $x_1\cdot x_2$.

3. **(3 балла)** Найти количество целых чисел от 1 до 1000 включительно, дающие одинаковый остаток от деления на 11 и на 12.

4. **(4 балла)** При подготовке к экзамену три школьника решали 100 задач. Каждый школьник решил по 60 задач, причем каждую задачу кто-нибудь решил. Задача считается трудной, если ее решил только один школьник. Легкой считается задача, которую решили все три школьника. Каких задач больше – легких или трудных? Насколько?

5. **(5 баллов)** Решите неравенство $\log_{\cos x}\left(x^2-6x-2\right)>\dfrac{2}{\log_5\cos x}$.

6. **(5 баллов)** Точка ***D*** лежит на продолжении стороны ***AC*** треугольника ***ABC***, площадь которого равна ***S***; при этом точка ***A*** находится между ***D*** и ***C***. Пусть ***O*** – точка пересечения медиан треугольника ***ABC***. Известно, что площадь треугольника ***DOC*** равна S_1. Выразите площадь треугольника ***DOB*** через ***S*** и S_1.

Решение задач 11 класс

1. **(2 балла)** Для многочлена $\left(x^2 - x + 1\right)^{100}$ найдите сумму коэффициентов при четных степенях x.

Решение: Пусть $P(x) = \left(x^2 - x + 1\right)^{100}$. Искомая сумма равна $\frac{P(1) + P(-1)}{2} = \frac{1 + 3^{100}}{2}$

Ответ: $\frac{1 + 3^{100}}{2}$

2. **(2 балла)** Про числа x_1 и x_2 известно, что $x_1 + x_2 = 2\sqrt{1703}$ и $|x_1 - x_2| = 90$. Найдите $x_1 \cdot x_2$.

Решение: Обозначим $A = x_1 + x_2$, $B = x_1 \cdot x_2$, $C = |x_1 - x_2|$. Поскольку $C^2 = A^2 - 4 \cdot B$, находим $B = -322$.

Ответ: -322.

3. **(3 балла)** Найти количество целых чисел от 1 до 1000 включительно, дающие одинаковый остаток от деления на 11 и на 12.

Решение. Обозначим $r_n(a)$ - остаток от деления числа a на число n. Пусть $a \in [1;1000]$ и $r_{11}(a) = r_{12}(a) = t$. Тогда $t \in \{0,...,10\}$ и выполняется равенство

$$t + 11k = t + 12m = a, \quad k, m \in N_0.$$

Из последнего равенства следует, что k делится на 12, а m делится на 11. Значит,

$$t + 11 \cdot 12 \cdot s = t + 132 \cdot s = a, \quad s \in N_0.$$

Осталось учесть условие $a = t + 132 \cdot s \leq 1000, \quad t \in \{0,...,10\}$:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad 132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}6 \quad \Rightarrow \quad 7 \quad \textit{чисел} \quad (s \ne 0)$$
$$t=1 \quad \Rightarrow \quad 1+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}57 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=2 \quad \Rightarrow \quad 2+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}56 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=3 \quad \Rightarrow \quad 3+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}55 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=4 \quad \Rightarrow \quad 4+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}55 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=5 \quad \Rightarrow \quad 5+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}54 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=6 \quad \Rightarrow \quad 6+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}54 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=7 \quad \Rightarrow \quad 7+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}53 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=8 \quad \Rightarrow \quad 8+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}52 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=9 \quad \Rightarrow \quad 9+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}51 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$
$$t=10 \quad \Rightarrow \quad 10+132s \le 1000 \quad \Rightarrow \quad s \le 7{,}5 \quad \Rightarrow \quad 8 \quad \textit{чисел}$$

Всего получаем 87 чисел. (очевидно, что последний перебор можно было бы и сократить)

Ответ: 87 чисел.

P.S. Альтернативный подход состоит в переборе s, где $s \le \frac{1000}{132} \approx 7.57$, и нахождении тех $t \in \{0,...,10\}$, для которых выполняется неравенство $a = t + 132 \cdot s \le 1000$

4. **(4 балла)** При подготовке к экзамену три школьника решали 100 задач. Каждый школьник решил по 60 задач, причем каждую задачу кто-нибудь решил. Задача считается трудной, если ее решил только один школьник. Легкой считается задача, которую решили все три школьника. Каких задач больше – легких или трудных ? Насколько?

Решение. Пусть

x_i - количество задач, решенных только i-м учеником,

$y_{i,j}$ - количество задач, решенных только i-м и j-м учеником,

z - количество задач, решенных всеми учениками (число легких задач)

Тогда число трудных задач равно $x_1 + x_2 + x_3$.

По условию имеем систему из четырех линейных уравнений относительно 7 неизвестных

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{2,3} + z = 100 \\ x_1 + y_{1,2} + y_{1,3} + z = 60 \\ x_2 + y_{1,2} + y_{2,3} + z = 60 \\ x_3 + y_{1,3} + y_{2,3} + z = 60 \end{cases}$$

Из этой системы можно найти, что $x_1 + x_2 + x_3 - z = 20$. Последнее равенство и дает ответ задачи.

Ответ: трудных задач на 20 штук больше, чем легких.

Другое решение состоит в применении формулы включения-исключения для подсчета мощности объединения трех множеств

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|.$$

Здесь A - множество задач, решенных 1-м учеником, $|A| = 60$

B - множество задач, решенных 2-м учеником, $|B| = 60$

C - множество задач, решенных 3-м учеником, $|C| = 60$

$A \cap B \cap C$ - - множество задач, решенных всеми учениками (множество легких задач),

$A \cup B \cup C$ - множество всех задач, $|A \cup B \cup C| = 100$.

Тогда множество трудных задач описывается равенством

$$(A \cup B \cup C) \setminus \Big((A \cap B) \cup \big((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) \big) \cup \big((B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C) \big) \Big)$$

.

Мощность данного множества равна

$$|A \cup B \cup C| - |A \cap B| - \big(|A \cap C| - |A \cap B \cap C|\big) - \big(|B \cap C| - |A \cap B \cap C|\big) =$$
$$= |A \cup B \cup C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + 2|A \cap B \cap C|.$$

С учетом формулы включения – исключения получаем, что количество трудных задач равно

$$2|A \cup B \cup C| - |A| - |C| - |B| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 200 - 180 + |A \cap B \cap C| = 20 + |A \cap B \cap C|.$$

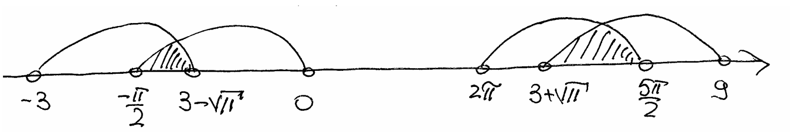
Значит, трудных задач на 20 штук больше, чем легких.

5. **(5 баллов)** Решите неравенство $\log_{\cos x}\left(x^2-6x-2\right) > \dfrac{2}{\log_5 \cos x}$.

Решение: О.Д.З.

$$\begin{cases} x^2-6x-2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,3-\sqrt{11}\right)\cup\left(3+\sqrt{11},+\infty\right) \\ 0<\cos x<1 \Leftrightarrow x\in\left(2\pi k-\dfrac{\pi}{2},2\pi k\right)\cup\left(2\pi k,2\pi k+\dfrac{\pi}{2}\right), k\in Z \end{cases}$$

$\log_{\cos x}\left(x^2-6x-2\right) > \dfrac{2}{\log_5 \cos x} \Leftrightarrow \log_{\cos x}\left(x^2-6x-2\right) > \log_{\cos x} 25 \Leftrightarrow$ (с учетом О.Д.З.)



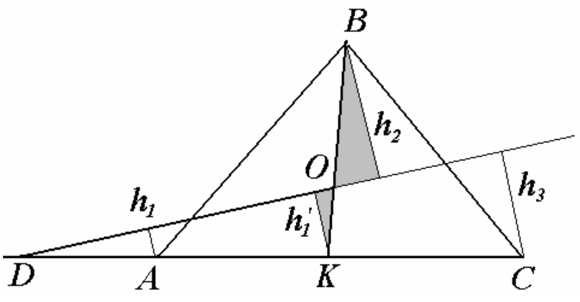
$x^2-6x-2<25 \Leftrightarrow x\in(-3;9)$.

Контроль О.Д.З. :

Ответ: $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, 3-\sqrt{11}\right)\cup\left(3+\sqrt{11}, \dfrac{5\pi}{2}\right)$.

6. **(5 баллов)** . Точка ***D*** лежит на продолжении стороны ***AC*** треугольника ***ABC***, площадь которого равна ***S***; при этом точка ***A*** находится между ***D*** и ***C***. Пусть ***O*** – точка пересечения медиан треугольника ***ABC***. Известно, что площадь треугольника ***DOC*** равна S_1. Выразите площадь треугольника ***DOB*** через ***S*** и S_1.

Решение: Покажем, что



$$S_{\Delta DOC} + S_{\Delta DOA} = S_{\Delta DOB} \qquad \textbf{(*)}.$$

Для этого (поскольку эти треугольники имеют общую сторону *DO*) достаточно показать, что длины перпендикуляров, опущенных на *DO* из вершин треугольника, удовлетворяют равенству

$$h_1 + h_3 = h_2 \qquad \textbf{(**)}.$$

Действительно, $h_1' = (h_1 + h_3)/2$ (свойство средней линии трапеции), а из подобия отмеченных серым треугольников следует, что $h_2 = 2h_1'$ (медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины). Отсюда вытекает справедливость (**).

Поскольку $S_{\Delta DOC} = S_{\Delta DOA} + S_{\Delta AOC}$, а $S_{\Delta AOC} = \dfrac{S}{3}$, получаем

Ответ: $S_{\Delta DOB} = 2S_1 - \dfrac{S}{3}$.